有限G集合のカテゴリーのスパンと表現論への応用(有限群論)

吉田, 知行

数理解析研究所講究録
475巻 1982年 79-94

有限G集合のカテゴリーのスパンと表現論への応用.

北大理　吉田知行 (Tomoyuki Yoshida)

§1. Introduction.

有限群の指標環を結ぶいくつかの写像がある. 以下Gを有限群, R(G)を有限群Gの指標環とする. $H \leq K \leq G$, $g \in G$に対し, 3種類の線型写像がある:

$$\mathrm{Ind}_H^K : R(H) \longrightarrow R(K) ; \alpha \longmapsto \alpha^K \quad (\text{誘導指標})$$

$$\mathrm{Res}_H^K : R(K) \longrightarrow R(H) : \beta \longmapsto \beta_H \quad (\text{制限指標})$$

$$\mathrm{Con}_H^g : R(H) \longrightarrow R(H^g) : \alpha \longmapsto \alpha^g \quad (\text{共役指標}).$$

ここで, $H^g = g^{-1}Hg$であり, α^gは$\alpha^g(h^g) = \alpha(h)$で定義される.

これらを組み合わせて, $H, K \leq G$, $x \in G$, $A \leq H^x \cap K$に対し, 写像$[H, x, A, K]$を次で定義する.

$$[H, x, A, K] : R(H) \longrightarrow R(K) : \alpha \longmapsto {\alpha^x}_A{}^K.$$

このとき,

$$(*)\quad [H, hxk, A^{k}, K] = [H, x, A, K] \quad (h \in H,\ k \in K).$$

となる．さらに，$[H, x, A, K]$と$[K, y, B, L]$の合成 $R(H) \longrightarrow R(K) \longrightarrow R(L)$を計算すると

$$(**)\quad [H, x, A, K]\cdot[K, y, B, L] = \sum_{k \in H\backslash K/B^{y^{-1}}} [H, xky, A^{ky} \cap B, L]$$

$$\left(= \sum_{k \in K} \frac{|A^{ky} \cap B|}{|A|\cdot|B|} [H, xky, A^{ky} \cap B, L] \right)$$

となる．

今度は逆に，$H, K \leq G$に対し，記号の集合

$$\{ [H, x, A, K] \mid x \in G,\ A \leq H^{x} \cap K \}$$

を生成系とし，上の$(*)$を関係式とするアーベル群を$\{H, K\}_G$とする．さらに$(**)$によって bilinear map $\{H, K\}_G \times \{K, L\}_G \to \{H, L\}_G$ を定義する．この bilinear map は結合的であり，とくに$\{H, H\}_G$は環になることが示される．加群としては，

$$\{H, K\}_G \cong \bigoplus_{g \in H\backslash G/K} \Omega(H^{g} \cap K).$$

ここでΩは Burnside 環である．

$R(H)$は$\{H, H\}_G$-加群である．もっと一般に，$\mathfrak{A}$がG-functor なら，bilinear map $\mathfrak{A}(H) \times \{H, K\}_G \longrightarrow \mathfrak{A}(K)$: $(\alpha, [H, x, A, K]) \longmapsto \alpha^{x}{}_{A}{}^{K}$ は結合的 $(\alpha\cdot(\lambda\mu) = (\alpha\cdot\lambda)\mu)$であ

り，とくに $\mathfrak{a}(H)$ は $\{H,H\}_G$ 加群である．

次のことを目標とする．

目標．$k\otimes_{\mathbb{Z}}\{H,H\}_G$ の中心原始巾等元 (c.p.i) を求める．ここで，k は可換環，$H\leq G$ である．

$k\otimes\{H,H\}_G$ の c pi は，G-functor $\mathfrak{a}$ に対する $\mathfrak{a}(H)$ の直和分解を与える．このことは，直既約加群のブロックへの分割や各種の induction 定理に関係がある．

§2．例と巾等元公式．

$\{H,H\}_G$ は，群 G に関するいろいろな環と関係がある．

(1) $H=1$ の場合．

$$\{1,1\}_G=\langle[1,x,1,1]\mid x\in G\rangle\cong\mathbb{Z}G\quad(\text{group ring}).$$

(K,R,F) を splitting p-modular system とする．$K=(R)$, $ch\,K=0$, $F=R/rad(R)$, $ch(F)=p$．$Irr(G)=\{\chi_1,\cdots,\chi_r\}$ とする．

$$KG\cong\prod_{i=1}^{r}M_{n_i}(K),\qquad n_i=deg\,\chi_i=\chi_i(1)$$

$cpi\,(KG)$ は次の形をしている．

$$e_i=\frac{\chi_i(1)}{|G|}\sum_{x\in G}\overline{\chi_i(x)}\,x$$

$cpi\,(RG)$ は次の形をしている．

$$e_B = \sum_{\chi_i \in B} e_i \qquad (B \in Bl(G))\ .$$

cpi(FG) は，lifting idempotent により，e_B の mod p reduction $\bar{e}_B$ である．

(2) <u>H = G の場合</u>

$\{G, G\}_G = \langle [G,1,A,G] \mid A \leq G \rangle \cong \Omega(G)$ (Burnside 環)

対応は $[G,1,A,G] \leftrightarrow [G/A]$ による．Burnside ring $\Omega(G)$ は，有限 G 集合のカテゴリーの直和と直積に関する Grothendieck ring である．

各 $S \leq G$ に対し，環準同型 φ_S を

$$\varphi_S : k \otimes \Omega(G) \longrightarrow k : [X] \longmapsto |X^S|\ ,$$

(X^S は固定点集合）で定義すると，k が $|G|$-torsion free なら

$$\varphi = (\varphi_S) : k \otimes \Omega(G) \rightarrowtail \prod_{(S) \in C_G} k \qquad (\text{ring mono})$$

である．$|G|^{-1} \in k$ なら，φ は同型である．(C_G は，G の部分群の共役類である）．

$|G|^{-1} \in k$ のとき，cpi $(k \otimes \Omega(G))$ は次の形をしている．

$$e_{G,S} = \frac{1}{|N_G(S)|} \sum_{D \leq S} |D| \mu(D, S) [G/D] \qquad ((S) \in C_G)$$

ここで，μ は subgroup lattice の Möbins function.

$\varphi_T(e_{G,S}) = 1$ if $S \overset{G}{\sim} T$, $\varphi_T(e_{G,S}) = 0$ if $S \overset{G}{\not\sim} T$.

$p^{-1} \notin k$, $|G|_{p'}^{-1} \in k$ のとき，epi $(k \otimes \Omega(G))$ は

$$e_{G,S}^{p} = \sum_{(T)\in C_G:\, O^p(T) \simeq S} e_{G,S} \qquad \left((S)\in C_G,\ O^p(S)=S\right).$$

ここで，$O^p(T) = \langle x \in T \mid x$ は p'-element $\rangle$.

(3) $H \trianglelefteq G$ の場合.

この場合，$\{H,H\}_G$ は twisted group ring $\Omega(H) \circ \mathbb{Z}[G/H]$ である．ただし，G/H を共役によって $\Omega(H)$ に作用させる．

(4) Hecke 環との関係.

$$\omega : \{H,K\}_G \longrightarrow \mathbb{Z}[H\backslash G/K] : [H,x,A,K] \longmapsto |H^x \cap K : A| \cdot (HxK)$$

は epi で，$\omega(\lambda\mu) = \omega(\lambda)\omega(\mu)$ である．とくに Hecke 環 $\mathbb{Z}[H\backslash G/H]$ $(\cong \mathrm{End}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}[H\backslash G]))$ は $\{H,H\}_G$ の剰余環である．

Burnside ring の巾等元公式は2つの応用をもつ．（似たことは group ring の場合にも言える）．

(a) 係数の整数性.

$O^p(S) = S \leq G$ のとき，$e_{G,S}^{p}$ における $[G/H]$ の係数は p-local integer である．とくに，$S = H = 1$ のとき，その係数は $|G|^{-1} \sum_S \mu(1,S)$ （S は G の p-subgp 全体を動く）となる．よって $\sum_S \mu(1,S) \equiv 0 \pmod{|G|_p}$. これは，$p$-subgroups の lattice の Euler 標数に関する Brown と Quillen の定理を与

える.

(b) Induction 定理への応用.

$\mathbb{Z}_{(p)}$ を $\mathbb{Z}$ の $p\mathbb{Z}$ での局所化とする. 巾等元公式を観察すると, $e^{p}_{G,S} \in \mathrm{Ind}_H^G(\mathbb{Z}_{(p)} \otimes \Omega(H))$ となることがわかる. ここで, $O^p(S)=S \trianglelefteq H \leq G$, $H/S \in Syl_p(N_G(S)/S)$ とする. 一方, 指標環 $R(G)$ は $\Omega(G)$ 加群で $(\theta\cdot[G/H]:=\theta_H{}^G)$, noncyclic $T \leq G$ に対し, $e_{G,T}\cdot R(G)=0$ となることがわかる. よって

$$\mathbb{Z}_{(p)} \otimes R(G) = \bigoplus_{(S)\in C_G;\ S\text{ は cyclic } p'\text{-gp.}} \mathbb{Z}_{(p)} \otimes e^{p}_{G,S}\cdot R(G)$$

$$= \sum \left\{ \mathrm{Ind}_H^G(\mathbb{Z}_{(p)} \otimes R(H)) \,\middle|\, H \text{ は hyper } p\text{-elem} \right\}$$

これより, 指標環に関する hyper-elementary induction が得られる.

§3. 主要定理.

G を有限群, $H \leq G$, (K, R, F) を splitting p-modular system とする.

$S \leq G$, $N:=N_G(S)$, $\bar{N}=N/S$, $\alpha \in Irr(\bar{N})$, $b \in Bl(\bar{N})$ に対し, $K \otimes \{H, H\}_G$ の元 $E_S(H)$, $E^p_S(H)$, $E_{S,\alpha}(H)$, $E^p_{S,b}(H)$ を次のように定義する. ($^{\forall}T \leq G$ に対し, $WT:=N_G(T)/T$ とおいた).

$$E_S(H) := \frac{1}{|N|\cdot|H|} \sum_{\substack{A \leq S \\ g \in G : S^g \leq H}} |A| \mu(A, S) [H, 1, A^g, H]$$

$$E^p_S(H) := \sum_{(T) \in \mathcal{C}_G : O^p(T) = S} E_T(H) \qquad (\text{ただし } O^p(S) = S)$$

$$E_{S,\alpha}(H) := \frac{\alpha(1)}{|H|\cdot|N|^2} \sum_{\substack{A \leq S \\ g \in G : S^g \leq H}} \sum_{n \in N} \alpha(n^{-1}) |A| \mu(A, S) [H, n^g, A^g, H]$$

$$E^p_{S,b}(H) := \sum_{\substack{(T) \in \mathcal{C}_G \\ : O^p(T) = S}} \sum_{\substack{b' \in Bl(W_T) \\ : b'^{\bar{N}} = b}} \sum_{\alpha \in b'} E_{T,\alpha}(H) \qquad (O^p(S) = S)$$

最後の $b'^{\bar{N}} = b$ は、Brauer hom $Z(F\bar{N}) \to Z(FN_{\bar{N}}(\bar{T})/\bar{T})$ $\cong Z(W_T)$ により、$b' \in Bl(W_T) = Bl(N_{\bar{N}}(\bar{T})/\bar{T})$ と $b \in Bl(\bar{N})$ とが対応することを意味する。

$E_S(H) \neq 0 \iff S \leq_G H$,

$E^p_S(H) \neq 0 \iff S \leq_G H$.

$E_{S,\alpha}(H) \neq 0 \iff \alpha \leq \pi_{(H\backslash G)^S}$ （π は置換表現の指標）,

$E^p_{S,b}(H) \neq 0 \iff \exists \alpha \leq \pi_{(H\backslash G)^S}$ st $\alpha \in b$.

<u>定理A</u>. 任意の可換環 k に対し、

$$k \otimes \Omega(G) \longrightarrow Z(k \otimes \{H, H\}_G) : [A\backslash G] \mapsto \sum_{g \in A\backslash G/H} [H, 1, A^g, H, H]$$

は環準同型で、$e_{G,S}$ ($\in cpi(\mathbb{Q} \otimes \Omega(G))$), $e^p_{G,S}$ ($\in cpi(\mathbb{Z}_{(p)} \otimes \Omega(G))$) の像が $E_S(H)$, $E^p_S(H)$ である。

定理B. $cpi(K\otimes\{H,H\}_G)=\{E_{\xi,\alpha}(H)\neq 0 \mid (\xi)\in C_G,\ \alpha\in Irr(W\xi)\}$

定理C. $cpi(R\otimes\{H,H\}_G)=\{E^p_{\xi,b}(H)\neq 0 \mid (\xi)\in C_G,\ O^p(\xi)=\xi,\ b\in Bl(W\xi)\}$

$cpi(F\otimes\{H,H\}_G)=\{\bar{E}\mid 0\neq E\in cpi(R\otimes\{H,H\}_G)\}$.

$E^p_{\xi,b}(H)$ における $[H,x,A,H]$ の係数は次で与えられる.

$$(*)\quad \frac{|A|}{|N_H(A)|}\sum_{\substack{A\le T\le H\\ :O^p(T)\underset{G}{\sim}\xi}}\ \sum_{\substack{b'\in Bl(WT)\\ :b'^{\bar{N}'}\sim b}}\ \sum_{n\in N_G(T)\cap HxN_H(A)}\frac{\mu(A,T)}{|N_G(T)|}\rho_{b'}(n^{-1})\in R$$

ここで $\rho_{b'}=\sum_{\alpha'\in b'\cap Irr(WT)}\alpha'(1)\,\alpha' \in R(WT)$, $\bar{N}'=W.T$.

$=\{x\}$

とくに, $\xi=1$, $A=1$, $B\in Bl(G)$ の defect 0 のとき,

$$\frac{\chi(1)}{|G|}\cdot\frac{1}{|H|}\sum_{y\in HxH}\chi(y)\in R \qquad \therefore \sum_{y\in HxH}\chi(y)\in |H|_p\cdot\mathbb{Z}.$$

(最後の結果は, $|G:C_G(y)|\cdot\chi(y)/\chi(1)\in\mathbb{Z}$ から簡単に出る).

巾等元公式(定理B, C)は新しい型の induction 定理を与えるかもしれない. $\{G,G\}_G\cong\Omega(G)$ で, $E_{\xi,\alpha}(G)=0$ if $\alpha\neq 1_{W\xi}$ だから, $H=G$ の場合は古典的な結果(Dress, Artin, Brauer, …)を与える.

$(\mathfrak{a},\tau,\rho,\sigma)$ を $\mathbb{C}$ 係数の G-functor とする. $\xi\le G$ に対し, $W\xi(=N_G(\xi)/\xi)$ は共役によって $\mathfrak{a}(\xi)$ に作用している.

したがって直和分解 $\mathcal{A}(S) = \bigoplus_\alpha \mathcal{A}(S)_\alpha \quad (\alpha \in Irr(WS))$
を得る。$\{H, H\}_G$ は $\mathcal{A}(H)$ に、$\theta \cdot [H, x, A, H] = \theta^x{}_A{}^H$ によって作用しているから、直和分解

$$\mathcal{A}(H) = \bigoplus_{(S) \in C_G} \bigoplus_{\alpha \in Irr(WS)} \mathcal{A}(H)_{S,\alpha} ,$$

$$(ここで、\mathcal{A}(H)_{S,\alpha} = \mathcal{A}(H) \cdot E_{S,\alpha}(H))$$

を得る。このとき次が言える。

$$\mathcal{A}(H)_{S,\alpha} \subseteq \{ \varphi^{gH} \mid \varphi \in \mathcal{A}(S)_\alpha, g \in G, S^g \subseteq H \}.$$

$\mathcal{A} = \mathbb{C} \otimes R$ (R は指標環から得られる G-functor) の場合、$\theta \in \mathbb{C} \otimes R(H)$ は

$$(**) \qquad \theta = \sum_{(S),\alpha} \theta_{S,\alpha} , \quad \theta_{S,\alpha} := \theta \cdot E_{S,\alpha}(H), \alpha \in Irr(WS), (S) \in C_G$$

と分解される。$supp\, \theta_{S,\alpha} \subseteq \{ x^g \in H \mid g \in G, \langle x \rangle = S \}$, $\theta_{S,\alpha} \in \sum \{ Im(Ind_T^H) \mid T \leq H, T \geq_G S \}$ だから (**) は Artin の定理を含んでいる。したがって いつ $\theta_{S,\alpha} \neq 0$ かに興味があるが、$S \not\leq_G H$ の場合、S が noncyclic の場合、$Ker\, \alpha \not\supseteq C_G(S)$ の場合に、$\theta_{S,\alpha} = 0$ となる。また $N_G(S) \leq H \trianglelefteq G$ で $\alpha \neq 1$ のときや、θ が有理指標で $\alpha \neq 1$ のときも $\theta_{S,\alpha} = 0$ となる。

これに似た応用をもう1つあげておく。$E^p_{S,B}(H)$ における $[H, x, H, H]$ $(x \in N_G(H))$ の係数は、

$$O^p(H) = S \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{|WH|} \sum_{b \in Bl(WH):\, b^{\bar{N}} = B} \rho_b(x^{-1}) ,$$

$$O^p(H) \not\sim_G \mathfrak{s} \quad \Rightarrow \quad 0$$

である．また，$H, L \le G$，$x \in G$，$A \le H^x \cap L$ に対し，

$$E_{\mathfrak{s},\alpha}(H)\cdot[H, x, A, L] = [H, x, A, L]\cdot E_{\mathfrak{s},\alpha}(L)$$

となる．さて，R 上の G-functor $\mathfrak{A}$ に対し，$H \longmapsto \mathfrak{A}(H)\cdot E_{\mathfrak{s},B}(H)$ は $\mathfrak{A}$ の direct summand である．$\mathfrak{A}$ が直既約と仮定すると，ある $\mathfrak{s} \le G$ と $B \in Bl(W\mathfrak{s})$ があって $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\cdot E_{\mathfrak{s},B}$ となる．

このとき，$\forall \theta \in \mathfrak{A}(H)$ に対し，

$$\theta = \theta\cdot E^p_{\mathfrak{s},B}(H) \equiv \begin{cases} 0 & \text{if } O^p(H) \not\sim_G \mathfrak{s} \\ \theta\cdot\displaystyle\sum_{b\in Bl(WH):\, b^{W\mathfrak{s}}=B} e_b & \text{if } O^p(H) = \mathfrak{s} \end{cases} \pmod{\mathfrak{i}(H)}.$$

ここで $e_b \in Z(R[WH])$ は b に対応する cpi．ただし $\mathfrak{i}(H) := \sum_{A \lneq H} \mathfrak{A}(A)^H$ とした．したがって，

$$O^p(H) \not\sim_G \mathfrak{s} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\mathfrak{A}}(H) = 0$$

$$\tilde{\mathfrak{A}}(H) \text{ の simple } WH\text{-factor } \in \bigcup\{b \in Bl(W) \mid b^{W\mathfrak{s}} = B\}.$$

例えば，V を直既約 FG 加群 $\in B \in Bl(G)$，$C_V(H) := \{v \in V \mid vh = v \ \ \forall h \in H\}$ とすれば，

$$(\ast\ast\ast)\begin{cases} H \text{ が p 部分群でない} \Rightarrow C_V(H) = \sum\{Im(Tr_A^H) \mid A \lneq H\}, \\ C_V(H)/\displaystyle\sum_{A\lneq H} Im(Tr_A^H) \text{ の simple factor } \in \bigcup\{b \in Bl(WH) \mid b^G = B\} \end{cases}$$

ここで $Tr_A^H : C_V(A) \longrightarrow C_V(H) : v \longmapsto \displaystyle\sum_{h\in A\backslash H} vh$.

§4. Spans.

<u>定義</u>. pull-back をもつ small category $\mathcal{C}$ に対し、Span と呼ばれるカテゴリー $\mathcal{S}p(\mathcal{C})$ を次で定義する.

(i) $Obj(\mathcal{S}p(\mathcal{C})) = Obj(\mathcal{C})$

(ii) $X, Y \in \mathcal{C}$ に対し、$\mathcal{S}p(\mathcal{C})$ における X から Y への morphism は、$[f', f''] := (X \xleftarrow{f'} A \xrightarrow{f''} Y)$ の形をしている. ただし、

$$(X \xleftarrow{f'} A \xrightarrow{f''} Y) = (X \xleftarrow{g'} B \xrightarrow{g''} Y)$$

$$\Leftrightarrow \exists h : A \xrightarrow{\sim} B \quad \text{s.t.} \quad \begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "f'"'] \arrow[dr, "f''"] \arrow[dd, "h", "\wr"'] & \\ X \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & & Y \arrow[l, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & B \arrow[ul, "g'"] \arrow[ur, "g''"'] & \end{tikzcd}$$

とする.

(iii) $[f', f''] : X \leftarrow A \rightarrow Y$ と $[g', g''] : Y \leftarrow B \rightarrow Z$ の合成を、$f \circ g = [\hat{g}' \circ f', \hat{f}'' \circ g''] : X \leftarrow C \rightarrow Z$、ここで、

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\hat{f}''"] \arrow[d, "\hat{g}'"'] \arrow[dr, phantom, "p.b"] & B \arrow[r, "g''"] \arrow[d, "g'"] & Z \\ A \arrow[r, "f''"'] \arrow[d, "f'"'] & Y & \\ X & & \end{tikzcd} \qquad (p.b = \text{pull-back})$$

によって定義する.

$\mathcal{S}_f^G$ を有限 G 集合のカテゴリーとする. $\mathcal{S}p(\mathcal{S}_f^G)$ は bi-product をもち、したがって semi-additive である. 可換環

kに対し，係数拡大 $(k\otimes \mathcal{S}p(\mathcal{S}_f^G))(X,Y):=k\otimes_{\mathbb{N}} \mathcal{S}p(\mathcal{S}_f^G)(X,Y)$ によって k-additive category $k\otimes \mathcal{S}p(\mathcal{S}_f^G)$ を得る．

$$k\{X,Y\} := k\otimes_{\mathbb{N}} \mathcal{S}p(\mathcal{S}_f^G)(X,Y), \quad (X,Y\in \mathcal{S}_f^G)$$

とおく．加群としては，$k\{X,Y\}\cong k\otimes_{\mathbb{Z}} \Omega(\mathcal{S}_f^G/X\times Y)$．$\Omega$ は $+$ と $\times$ に関する Gro 環である．

$k\{H\backslash G, K\backslash G\}$は，

$$\begin{array}{ccccc} [H,x,A,K]:=[f',f'']: H\backslash G & \xleftarrow{f'} & A\backslash G & \xrightarrow{f''} & K\backslash G \\ Hx & \longleftarrow & A & \longmapsto & K \end{array}$$

$(x\in G,\ A\le H^x\cap K)$ の形の元によって生成される．積は§1で述べたものと一致する．

<u>定義</u>．permutation kG-modules と kG-maps のカテゴリーを Hecke カテゴリーと言い，$\mathcal{H}_{kG}$ と書く．

kG-map $f: kX\longrightarrow kY$ $(X,Y\in \mathcal{S}_f^G)$ は行列の形で表わせる．$f(x)=\sum_{y\in Y} f_{xy}\, y$ とした時，f の行列形は $(f_{xy})_{x\in X,\, y\in Y}$ である．f が kG-hom という条件は，$f_{xy}=f_{xg,yg}$ $(g\in G)$ と表わせる．とくに $\mathcal{H}_k\cong \underline{\underline{Mat}}_k\cong k\otimes \mathcal{S}p(\mathcal{S}_f)$．

C_G を G の部分群の共役類とする．各 $S\le G$ に対し，additive functor $\Psi_S: \mathbb{Z}\otimes \mathcal{S}p(\mathcal{S}_f^G)\longrightarrow \mathcal{H}_{\mathbb{Z}[WS]}$ を，

$$X \longmapsto \mathbb{Z}[X^S],$$

$$(X\xleftarrow{f'} A\xrightarrow{f''} Y)\longmapsto \left(|f'^{-1}(x)\cap f''^{-1}(y)\cap A^S|\right)_{x\in X^S,\, y\in Y^S}$$

によって定義する．さらに，

$$\Psi = (\Psi_S) : \mathbb{Z} \otimes S_p(S_f{}^G) \longrightarrow \prod_{(S) \in C_G} H_{\mathbb{Z}[W_S]}$$

とする．

<u>定理1</u>．Ψは埋め込みである．即ち，

$$\psi : \mathbb{Z}\{X, Y\} \rightarrowtail \prod_{(S)\in C_G} Hom_{\mathbb{Z}[W_S]}(\mathbb{Z}[X^S], \mathbb{Z}[Y^S]).$$

さらに Coker ψ は torsion 群．

この定理を証明するために次の定理を $\mathcal{E} = S_f{}^G/X\times Y$ など に適用する．

$\mathcal{E}$ を small S_f-topos，$\Omega(\mathcal{E})$を $+$ と $\times$ に関する Gro 環（これを$\mathcal{E}$の Burnside 環という），$\mathcal{I}$ を$\mathcal{E}$の連結な object の同型類の完全代表系とする．各 $I \in \mathcal{I}$ に対し，

$$\varphi_I : \Omega(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{Z} : [X] \longmapsto |\mathcal{E}(I, X)|$$

$$\varphi = (\varphi_I) : \Omega(\mathcal{E}) \longrightarrow \prod_{I\in\mathcal{I}} \mathbb{Z}$$

とすると，

<u>定理2</u>．φは ring hom でしかも mono．

前半はトポスの基本的結果から出る．mono を示すには，

$$X, Y \in \mathcal{E}, \quad |\mathcal{E}(I, X)| = |\mathcal{E}(I, Y)| \quad \forall I \in \mathcal{I} \Rightarrow X \cong Y$$

を示せばよい．そのために，$\forall A \in \mathcal{E}$ に対し，$\#\{f : A \rightarrowtail X\} = \#\{g : A \rightarrowtail Y\}$ であることを，Aの商対象の個数（$\leq |Sub(\Omega^A)|$）に関する帰納法で証明すればよい．

定理1より, cpi $(\mathbb{C}\otimes\mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^G)) \overset{\text{単}}{\rightleftarrows}$ cpi $(\prod_{(\mathfrak{s})}\mathcal{H}_{\mathbb{C}[W\mathfrak{s}]}) \longleftrightarrow \bigcup\{Irr(W\mathfrak{s}) \mid (\mathfrak{s})\in C_G\}$ となる. 単で写してみれば, 定理Bの $\{E_{\mathfrak{s},\sigma}(H) \mid H\leq G\}$ が $\mathbb{C}\otimes\mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^G)$ の cpi を与えることがわかる. こうして定理Bが証明される.

<u>定義</u>. $\mathfrak{s}\leq G$, $N=N_G(\mathfrak{s})$, $W\mathfrak{s}:=N/\mathfrak{s}$ とする. functor $\mathcal{S}_f^G \xrightarrow{res} \mathcal{S}_f^N \xrightarrow{pr} \mathcal{S}_f^{W\mathfrak{s}}$: $X \longmapsto X|_N \longmapsto X^{\mathfrak{s}}$ から誘導されたspanやHeckeカテゴリーの間のfunctorを<u>Brauer functor</u>という. $Br:\mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^G)\longrightarrow\mathcal{S}_p(\mathcal{S}_f^{W\mathfrak{s}})$ は常にfunctorである.

<u>Lem</u>. $ch(k)=p$, $\mathfrak{s}$ が p-subgp のときに限り, $Br:\mathcal{H}_{kG}\longrightarrow\mathcal{H}_{k[W\mathfrak{s}]}$ はfunctorであって, ring hom

$$\begin{array}{cccc} \beta: & Z(kG) & \longrightarrow & Z(k[W\mathfrak{s}]) \\ & \wr\| & & \wr\| \\ & Z(\mathcal{H}_{kG}) & & Z(\mathcal{H}_{k[W\mathfrak{s}]}) \end{array}$$

を誘導する. さらに, s をBrauer準同型とすれば,

$$\begin{tikzcd} Z(kG) \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "s"'] & \circlearrowleft & Z(k[W\mathfrak{s}]) \\ & Z(kN) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(K, R, F) を splitting p-modular system とする。定理2より、

$$Z(R\otimes S_p(S_f G)) \xrightarrow{Z(\Psi)} \bigoplus_{(\xi)\in C_G} Z(H_{R[W\xi]}) \cong \bigoplus_{(\xi)\in C_G} Z(R[W\xi])$$

$$\xrightarrow{\sim} \bigoplus_{(\xi)\in C_G} \bigoplus_{b\in Bl(W\xi)} e_b\cdot Z(R[W\xi])$$

上の補題により、$\mathrm{cpi}(R\otimes S_p(S_f G))$ は、定理Cの $E^p_{\xi,b}$ の形の $Z(K\otimes S_p(S_f G))$ の元の和であることがわかる。

<u>補題</u>. $\gamma: k\otimes\Omega(G) \longrightarrow Z(k\otimes S_p(S_f G))$

$$[A] \longmapsto \gamma(A) = (\gamma(A)(X))_{X\in S_f G},$$

$$\gamma(A)(X) = [pr, pr] : X \xleftarrow{pr} A\times X \xrightarrow{pr} X$$

は ring hom で mono.

$e_{G,\xi}$ や $e^p_{G,\xi}$ の γ による像が定理Aの E_ξ や E^p_ξ である。

<u>定理3</u>. $|G|_{p'}^{-1}\in k$, $\xi = O^p(\xi)\le G$ のとき、Brauer functor によって、

$$E^p_\xi\cdot(k\otimes S_p(S_f G)) \cong E^p_1\cdot(k\otimes S_p(S_f{}^{W\xi})).$$

さて、定理Cを証明するには、$|\mathrm{cpi}(E^p_\xi\cdot(R\otimes S_p(S_f G)))| \geq |Bl(W\xi)|$ を示せばよい。定理3より、$\xi = 1$ の場合に証明す

れば良い。"既約 $E_1^{p.}(F\otimes S_p(S_f^G))$-module" とは F 上のコホモロジー的 G-functor のことであり、C_{FG} がコホモロジー的 G-functor に作用するから、既約 $E_1^{p.}(F\otimes S_p(S_f^G))$-module は $|Bl(G)|$ 個のブロックに分割される。これより、$c_{pi}(E_1^{p.}(R\otimes S_p(S_f^G)))$ $= c_{pi}(E_1^{p.}(F\otimes S_p(S_f^G))) = |Bl(G)|$ となり定理が示される。